SESSION 1985

Concours Commun
E.N.S.A.M

MATHÉMATIQUES

(Options T et TA)

Épreuve n° 1 (exercices)

Durée : 4 heures

Les cinq exercices proposés sont indépendants.

Aucun document n'est autorisé.

EXERCICE I

On considère la suite de fonctions (U_n) :

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow U_n(x) = 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) \qquad (n \geqslant 1)$$

On se propose d'étudier la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$.

1°) Etudier la convergence simple de la série.

2°) a et b étant deux réels $(a < b)$, étudier la convergence uniforme de la série sur $[a, b]$.

3°) Déterminer une suite de fonctions (V_n) telle que :

$$\forall n \geqslant 1 \ , \ \forall x \in \mathbb{R} : \ U_n(x) = V_n(x) - V_{n-1}(x)$$

En déduire le calcul de $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x)$,

puis celui de $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$

4°) Soit $A_n(x) = S(x) - S_n(x)$.

Etudier la limite de la suite $A_n(3^n)$.

La série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$?

EXERCICE II

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien orienté, rapporté au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

Un point M de $\mathcal{P}$ est repéré par ses coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$.

On définit, pour tout réel $t \in [0, 2\pi]$, la droite D_t d'équation :

$$x \cos\frac{t}{2} - y \sin\frac{t}{2} = \cos\frac{3t}{2}$$

Soit γ l'enveloppe de la famille (D_t).

On désigne par i le nombre complexe $(0, 1)$.

1°) Donner une représentation paramétrique $(x(t), y(t))$ de γ .

On pose $z(t) = x(t) + i\, y(t)$

Exprimer $z(t)$ sous forme d'une combinaison linéaire de e^{it} et de e^{-2it} .

2°) Montrer que γ est invariante dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

3°) Construire la courbe γ . On précisera ses points de rebroussement et les tangentes correspondantes.

Quels sont les éléments de symétrie de γ ?

EXERCICE III

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. E est l'espace vectoriel associé. Un point M de $\mathcal{E}$ est repéré par ses coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$.

On définit l'ensemble :

$$\Delta = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E} \mid x \geqslant 0 , y \geqslant 0 , z \geqslant 0 , x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\} .$$

1°) Calculer les intégrales : $\alpha = \iiint_\Delta z^2 \, dx\, dy\, dz$, $\beta = \iiint_\Delta xy \, dx\, dy\, dz$.

2°) Soit Φ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$\Phi(\vec{o}) = o$.

$\Phi(\vec{\omega}) = \|\vec{\omega}\|^2 \iiint_\Delta \|\overrightarrow{MH}\|^2 \, dx\, dy\, dz$ pour $\vec{\omega} \neq \vec{o}$

Dans l'intégrale, H est la projection orthogonale du point courant M de Δ sur la droite D passant par O et de vecteur directeur $\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} \neq \vec{o}$

Montrer que Φ est une forme quadratique sur E .

Déterminer la matrice A de Φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3)) Soit $\Sigma = \{M \in \mathcal{E} \mid \Phi(\overrightarrow{OM}) = 1\}$

Montrer que Σ est une surface de révolution.

Quel est son axe de révolution ?

EXERCICE IV

E est un espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct.

a est une constante réelle donnée strictement positive.

On définit sur E un champ vectoriel $\vec{V}$: à tout point M de E tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ on fait correspondre le vecteur :

$\vec{V}(M) = (ax + yz)\vec{i} + (ay + zx)\vec{j} + (az + xy)\vec{k}$

On définit les ensembles :

$\Sigma_1 = \{M(x,y,z) \in E \mid z = 2a \ , \ x^2 + y^2 \leqslant 4a^2\}$

$\Sigma_2 = \{M(x,y,z) \in E \mid 2az = x^2 + y^2 \ , \ z \leqslant 2a\}$

$\Delta = \{M(x,y,z) \in E \mid x^2 + y^2 \leqslant 2az \leqslant 4a^2\}$

Σ_1 et Σ_2 sont des morceaux de surface orientés : leur normale orientée est dirigée vers l'extérieur de Δ.

1°) Calculer l'aire de Σ_2.

2°) Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers Σ_1

3°) Calculer div $\vec{V}$ ainsi que le volume de Δ.
En déduire le flux de $\vec{V}$ à travers Σ_2

4°) Montrer que le champ $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire.
Déterminer un potentiel scalaire de $\vec{V}$.

EXERCICE V

X et Y sont deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, différentiables en (x_0, y_0)

On notera :

$$\frac{\partial X}{\partial x}(x_0, y_0) = a \ ; \ \frac{\partial X}{\partial y}(x_0, y_0) = b \ ; \ \frac{\partial Y}{\partial x}(x_0, y_0) = c \ ; \ \frac{\partial Y}{\partial y}(x_0, y_0) = d$$

i désigne le nombre complexe (o, 1) .

θ étant un réel, et λ un réel non nul, on pose :

$$A_\theta(\lambda) = \frac{1}{\lambda e^{i\theta}} [X(x_0 + \lambda \cos\theta, y_0 + \lambda \sin\theta) + i\, Y(x_0 + \lambda \cos\theta, y_0 + \lambda \sin\theta) - X(x_0, y_0) - i\, Y(x_0, y_0)] .$$

1°) θ étant supposé fixé, montrer que $A_\theta(\lambda)$ admet une limite quand λ tend vers zéro. Calculer cette limite, que l'on notera $B(\theta)$, en fonction de a, b, c, d et θ .

2°) Soit $m(\theta)$ le point du plan complexe d'affixe $B(\theta)$, et γ l'ensemble des points $m(\theta)$ quand θ décrit $[o, \pi]$.

Montrer que γ est un cercle. Déterminer son centre et son rayon.

3°) Dans cette question, X et Y sont définies par :

$X(x, y) + i\, Y(x, y) = \sin \bar{z}$ où $\bar{z} = x - iy$

Déterminer le centre et le rayon du cercle γ pour un point quelconque (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$.

Existe-t-il des points (x_0, y_0) particuliers pour lesquels le rayon du cercle γ est nul ?